

N-Body simuleringer

Denne tekst beskriver kort hvordan man kan komme i gang med at løse bevægelsesligninger for mange-legeme systemer. For at kunne bruge de vedlagte eksekverbare-programmer, er det nødvendigt at have en Windows pc. Man kan dog også bruge Linux og MacOS, hvis man er villig til selv at kompilere programmerne.

Kompilere

Det lyder så let at kompilere et program, men der er forskelle fra platform til platform, så jeg vil ikke foreslå en nybegynder at gå i gang med kompilering af andres programmer, hvis man arbejder med en kort tidshorisont.

Det er dog ofte nødvendigt at benytte programmer til at generere startfordelinger og lave beregninger, men hvis man selv har skrevet et program, er det også meget nemmere at rette de fejl, som en kompiler finder frem til.

En gratis Fortran-kompiler kan man hente på webstedet www.g95.org.

Foruden kompilatoren kan det også være nødvendigt at indlæse andre færdige programbiblioteker. Man kan finde en liste over biblioteker på adressen http://g95.sourceforge.net/g95_status.html

Andre programmer

Redigeringsprogram

Man kan godt bruge Notepad eller Edit til at redigere i fortranprogrammer, men de er ikke ret gode. Et lille simpelt og gratis program, som er meget bedre end Notepad kan f.eks. være Tinyedit. Det kan du hente på adressen: <http://www.tinyedit.com/>

Graftegning

Et gratis program til at tegne grafer i 2 dimensioner og i 3 dimensioner, kan du finde på adressen: <http://gnuplot.sourceforge.net/> I mappen Testresultater kan du se en graf tegnet med GNUplot. GNUplot er interaktivt, men det kan også gemme alle dine indtastede kommandoer, så du hurtigt kan afvikle dem på et senere tidspunkt. Der findes også et eksempel på en sådan gemt kommandorække i mappen Testresultater. Filen hedder Plotgraf.plt. (Du kan redigere den i enhver tekstlæser.) NB: Programmet kræver, at du selv redigerer en datafil fra simuleringensprogrammet, så kun x-, y-, z-koordinaterne er tilbage i filen.

Hvis du selv fra bunden vil programmere et program, der kan lave grafer, kan du bruge biblioteket DISLIN. Det kan downloades på adressen:

ftp://ftp.gwdg.de/pub/grafik/dislin/windows/dl_95_gc.zip

Endelig kan jeg *klart anbefale* programmet Topcat, som er rigtig godt til at indlæse tabeller og derefter lave 3D-plots af tallene. Billederne kan f.eks. eksporteres til gif-format, så man til sidst kan lave en animeret gif-fil. Programmet kan hentes på adressen: <http://www.star.bris.ac.uk/~mbt/topcat/>

Simuleringsprogrammet

Programmet til at regne bevægelsesligningerne ud for N legemer er et Fortran-77 program, som Sverre J Aarseth har skrevet. Programmet er offentliggjort i J. Binney & S. Tremaine: "Galactic Dynamics".

S. J. Aarseth er en af pionererne indenfor galaksesimuleringer, og mange af hans efterfølgere har arbejdet videre med hans programmer.

Der findes mere avancerede programmer til fri download på Internettet, men ingen er så kompakte og overskuelige som programmet, der anvendes her.

Programmet virker ved, at man indlæser en startfordeling, og så regner programmet bevægelsesligningerne og totalenergien ud for en, og resultaterne dumpes i en mængde tekst-filer, som derefter kan indlæses i et grafikprogram eller et regneark.

Parametre

Der skal være konstrueret en tekstfil med navnet *Startfil*, som indeholder følgende:

```
N
eta
deltat
Tcrit
Eps2
m1   x1   y1   z1   vx1  vy1  vz1
...
mN   xN   yN   zN   vxN  vyN  vzN
```

Partikeldataene skal være skrevet på formatet: format(1x,7(1pe14.6)). Dvs. Der skal være 1 mellemrum efterfulgt af 7 tal, der er 14 karakterer lange og med 6 decimaler. Tallene angives i 10-tals eksponentialformatet. Nedenfor er et eksempel på de første linier i en startfil:

```
100
2.000000E-02
1.000000E+00
5.000000E+01
1.000000E-03
1.000000E-02 -1.473956E-03 -4.618212E-03 4.161983E-03 -1.635099E-02 -1.733586E-02 1.865468E-01
1.000000E-02 -1.167595E-02 9.209679E-03 2.078065E-03 -1.156662E+00 8.385236E-01 7.363014E-02
```

Man ser af eksemplet ovenfor at $N=100$, $\text{eta}=0,02$, $\text{deltat}=1.0$, $\text{Tcrit}=50$ og $\text{eps2}=0,001$.

N angiver antallet af partikler. eta er en parameter, der fortæller hvor præcist, der skal regnes med. Hvis energien f.eks. viser sig ikke at være bevaret i løbet af en simulation, bør man nok overveje at gøre eta mindre og så gentage simuleringen.

Deltat fortæller hvor tit, man skal skrive en fil ud med resultater. Tcrit fortæller hvornår simuleringen skal stoppe. Endelig er eps2 den såkaldte softeningparameter, der fysisk set sørger for, at stjernerne ikke ramler ind i hinanden. Det gøre de nemlig ikke i virkeligheden, men da vi ikke kan arbejde med $N=200$ milliarder, vil problemet kunne opstå i simuleringen. Hvis afstanden mellem to legemer også bliver lille, vil beregningerne af bevægelsesligningerne også gå galt, så det er nødvendigt at partiklerne ikke kommer for tæt på hinanden.

Denne parameter bevirker altså i sig selv, at beregningerne ikke er helt korrekte, men de løser nogle endnu værre potentielle beregningsfejl. Hvis ens totalenergi ikke stemmer særlig godt overens med en teoretisk værdi, kan man gøre eps2 mindre. Men man skal huske, at beregningen af bevægelsesligningerne dermed kan blive fejlagtig.

Startfordelinger

Solsystem

En opgave for eleven kunne være at konstruere en startfordeling af legemer. For eksempel kan eleven simulere et solsystem, og så kunne opgaven være at tilegne passende masser og hastigheder samt afstande for kloderne. Her må ϵ_2 gerne være 0 eller svare til Solens radius.

Kuglehobe

Man kan også simulere kuglehobe hvor N som bekendt ligger mellem 10^4 - 10^6 stjerner. Programmet tillader op til 10^5 stjerner. Hvis man skal simulere systemer med flere end 10^5 stjerner, må man bundte stjernerne i hobe, dvs. masserne af det samlede antal partikler skal svare til hobens/galaksens masse. Hvis man vil simulere kuglehobe, kan det anbefales at læse om Plummer- eller King-modeller, som beskriver hvordan massefordelingen skal være i en kuglebob.

Galakser

I programmerne findes programmet Jaffe.exe. Det simulerer en lysfordeling, der svarer til en E0-galakse. Hvis masse-lystyrkeforholdet er konstant, vil fordelingen også passe med massefordelingen. Jaffe.exe tager altså ikke højde for mørkt stof i galakserne! Jaffefordelingen er i øvrigt stabil, så skal man simulere kollisioner, vil denne model være egnet. Hvis man er meget sej, kan man overveje at lade Jeans-ligningerne lave en stjernefordeling. Softeningparameterens værdi ved Jaffefordelingen er $\epsilon_2 = (3,7 \cdot r_0 \cdot N^{-1/3})^2$. r_0 er halvmasseradius af fordelingen. Den er i jaffe.exe sat til 1. Halvmasseradius betyder, at hvis man akkumulerer fordelingsens masse, så vil man finde halvdelen af fordelingsens masse indenfor halvmasseradius.

Regnetiden går som $O(N^2)$. Så hvis det tager 20 s at køre en simulering med 100 partikler, så tager det altså i omegnen af 80 s at køre en simulering med 200 partikler. At køre med 10000 partikler kræver altså $100^2 \cdot 20s = 2 \cdot 10^5 s = 2,3h$.

Beregnete størrelser

Foruden at analysere sted-koordinater for legemer, kan man også overveje at kigge på inertimoment, impulsmoment, form af legemepopulationer, overfladelystyrke (tænk evt. på de Vaucoleurs-profiler) osv. Det er dog værd at bemærke, at programmering er en langsommelig proces, og hvis man som elev vil arbejde med simuleringer, vil mindre opgaver altid være at foretrække.

Enheder

Programmet regner ikke i SI-enheder. Det skyldes hensynet til at lave en hurtig programafvikling. F.eks. er gravitationskonstanten defineret til 1 i programmet. Man skal altså selv regne om til forståelige enheder.

Her er Keplers 3. lov en stor hjælp. Nedenfor vil vi gennemgå et eksempel på hvordan man regner om mellem enhederne.

Vi sætter totalmassen af galaksen/hoben til $M=1$. G er i programmet defineret til 1. Lad os definere længdeenheden så halvmasseradius for fordelingen $r_0=1$.

Keplers 3. lov er:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow v(r_0) = \sqrt{\frac{G \cdot M(r_0)}{r_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\text{computerenheder}].$$

Hvis man vil finde en tidsenhede kan man atter manipulere med Keplers 3. lov, og så får man følgende relation:

$$T_0 = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_0^3}{G \cdot M(r_0)}} = \sqrt{8} \cdot \pi [\text{computerenheder}].$$

Tilsvarende gælder for energien af en partikel at:

$$E_0 = \frac{-G \cdot M(r_0) \cdot m}{r_0} = \frac{-1}{2 \cdot N} [\text{computerenheder}].$$

Lad nu os betragte en galakse med $M = a \cdot 10^{10} \cdot M_{\text{sol}}$ og $r_0 = b$ kpc. Vi betragter altså en galakse. Sættes disse parametre ind i Keplers 3. lov i stedet for ovenstående parametre får man:

$$v_0 = 146,6 \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{km}{s}$$

$$T_0 = 1,4881 \cdot 10^{14} \cdot \sqrt{8} \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{b^3}{a}} s$$

$$E_0 = \frac{4,276 \cdot 10^{50} \cdot a^2}{b \cdot N} J.$$

Vi kan altså nu finde den direkte sammenhæng mellem computerenheder og SI-enheder:

$$1 v_{\text{computer}} = 207,35 \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{km}{s}$$

$$1 T_{\text{computer}} = 4,716 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{\frac{b^3}{a}} yr$$

$$1 E_{\text{computer}} = 8,552 \cdot 10^{50} \cdot \frac{a^2}{b} J$$

$$1 l_{\text{computer}} = 3,086 \cdot 10^{19} \cdot b \cdot m.$$

Formlen for $1 l_{\text{computer}} = b \text{ kpc}$ tyder på, at vi har regnet rigtigt.